УДК 517.929

В.П. Марценюк, Н.М. Гандзюк
Тернопільський державний медичний університет імені І.Я. Горбачевського
Україна, м. Тернопіль, вул. Майдан Волі, 1, 46001, *nadiagan84@gmail.com*

Задача оптимального керування компартментних систем

V.P. Martsenyuk, N.M. Gandzyuk
I.Ya. Horbachevsky Ternopil State Medical University
Ukraine, Ternopi, lStr. m Voli, 1, 46001, nadiagan84@gmail.com

The Problem of Optimal Control of Compartmental Systems

В.П. Марценюк, Н.М. Гандзюк
Тернопольский государственный медицинский университет им. И.Я. Горбачевського
Украина, г. Тернополь, ул. площадь Воли, 1, 46001, *nadiagan84@gmail.com*

Задача оптимального управления компартментних систем

В даній роботі розглянута задача оптимального керування компартментної системи з анестезіології у випадку лінійності та нелінійності з використанням динаміки Міхаеліса – Ментена.
Ключові слова: оптимальне керування, компартментна система.

The problem of optimal control of compartmental system of anesthesiology in the case of linearity and nonlinearity by using the dynamics of the Michaelis – Menten is described.
Key words: optimal control, compartmental system.

В данной работе рассмотрена задача оптимального управления компартментного системы по анестезиологии в случае линейности и нелинейности с использованием динамики Михаэлиса – Ментена.
Ключевые слова: оптимальное управление, компартментная система.

Проблеми керування реальними системами у століття швидкого науково- технічного розвитку набувають значну важливість і актуальність. В цьому напрямку викликає значний інтерес керування системами з позицій оптимізації певних характеристик системи, наприклад, максимізації дальності польоту літального апарату, максимізації прибутку підприємства, мінімізації енергії або витрат, необхідних для досягнення певного цільового стану, мінімізації відхилення траєкторії руху системи від заданої та ін. Можна навести ще багато подібних задач. Знаходження та дослідження керування, за допомогою якого може бути досягнута задана ціль шляхом оптимізації певного критерію, складає фундаментальну основу теорії керування [1].

Для постановки задач оптимального керування необхідно, в першу чергу, визначити цільову функцію оптимізаційного процесу. З цією метою потрібно зробити відповідне формулювання задачі у фізичній формі і здійснити переклад цього фізичного опису на формальну мову математичних співвідношень [2].

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти таке керування, при якому виконуються деякі обмеження і мінімізується певний функціонал. Вигляд обмежень і функціоналів визначаються умовами реальних задач.

У даній роботі розглядається задача оптимального керування компартментних систем. В таких задачах множина керувань, як правило, наступна:

$$U:\{u(t): a \le u(t) \le b,\ t_0 \le t \le t_f,\quad u(t) - \textit{вимірна}\}$$

тут $a,b,t_f > 0$

Нехай припустимо, що стан системи $x(t) \in R^n$ при заданому керуванні $u \in U$ визначається системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x,u), \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

де $f: R \times R^n \times R \to R^n$ є неперервною і має неперервні перші частинні похідні відносно x та u. Оскільки припускається, що $u(t)$ є вимірною та обмеженою, то права частина системи (1) є неперервною відносно x і лише вимірною відносно t для фіксованого x. Отже, розв'язки системи (1) є абсолютно неперервними функціями, що задовольняють систему (1) майже скрізь.

Задача оптимального керування містить критерій якості $J[u]$ вигляду:

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} L(t,x,u)dt + \phi(x(t_f)),$$

де L – задана дійснозначна функція і ϕ – неперервно – диференційована дійснозначна функція.

Мета задачі полягає в тому, щоб знайти оптимальне керування $u^* \in U$ таке, щоб

$$J[u^*] = \inf_{u \in U} J[u] \tag{2}$$

Після того, як описано модель та визначено критерій якості, в теорії оптимального керування ставиться ряд задач:

- доведення існування оптимального керування;
- опис побудови оптимального керування;
- доведення єдиності оптимального керування;
- чисельне обчислення оптимального керування;
- дослідження залежності оптимального керування від параметрів моделі.

Теорема 1. Нехай розглядається задача оптимального керування (1), (2) на заданому інтервалі $[t_0, t_f]$. Припустимо, що:

1) існує стала $M > 0$ така, що $\|x(t,u)\| \le M$ для всіх $u \in U$ та $t_0 \le t \le t_f$;

2) L – напівнеперервна знизу;

3) множина $D^+ = \{(y^0, y); \exists v \in U, y = f(t,x,v), y^0 \ge L(t,x,v)\}$ є опуклою для $(t,x) \in [t_0, t_f] \times \{[x[\le M\}$. Тоді існує оптимальне керування $u^* \in U$.

Теорема 2. Нехай $u^* \in U$ – оптимальне керування для задачі (1), (2). Тоді існує спряжена функція $\lambda: R \to R^n$ така, що $x(t,u^*), u^*, \lambda$ задовольняють систему:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x,u^*), \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

а також спряжену систему:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{dH}{dx} = -L_x(t,x,u^*) - \lambda^T f_x(t,x,u^*),$$
$$\lambda(t_f) = \phi'(x(t_f)), \text{ умова ттрансверальності} \quad (4)$$

де H – функція Гамільтона – Понтрягіна задається, як:

$$H(t,x,u) = L(t,x,u) + \lambda^T f(t,x,u). \quad (5)$$

Компартментна модель керування

Розглянемо наступну систему керування:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t)$$
$$x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m \quad (6)$$

з відповідною початковою умовою: $x(0) = x_0$. Тут вважаємо, що $f : R^n \to R^n$ є неперервною і $f(0) = 0$.

Множина керування U задається, як:

$$U = \left\{u(t) = \{u_i\}_{i=1}^m : 0 \le u_i(t) \le 1,\ 0 \le t \le t_f,\ \ u_i(t) - \textit{вимірна}\right\}$$

t_f – кінцевий час керування.

Метою задачі оптимального керування є експоненціальна стабілізація системи (6). Тобто критерій якості в такому випадку має вигляд:

$$J[u] = \int_0^{t_f} \left[(p^T x(t) - Ke^{-vt})^2 + \frac{1}{2} W u^T(t) u(t) \right] dt, \quad (7)$$

W – ваговий коефіцієнт.

Отже, метою роботи є визначення оптимального керування $u^* \in U$, що задовольняє умову (2).

На основі теорема 2 оптимальне керування в задачі (6), (7) існує, оскільки підінтегральний вираз в критерії якості є опуклою функцією, а траєкторія системи належить простору L^∞. Використаємо теорему 2 для отримання необхідних умов оптимальності.

Для опису побудови оптимального керування використаємо функцію Гамільтона – Понтрягіна вигляду:

$$H = (p^T x(t) - Ke^{-vt})^2 + \frac{1}{2} W u^T u + \lambda^T(t)(Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t))$$
$$\lambda(t) \in R^n$$

На основі теореми 2 спряжена система буде мати вигляд:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{dH}{dx} = -2(p^T x(t) - Ke^{-vt})p - \lambda^T(t)A + \lambda^T \frac{df(x(t))}{dx} \quad (8)$$

На множині $\{t : 0 < u_i^*(t) < 1\}$ маємо $\left.\frac{dH}{du}\right|_{u=u^*} = 0$, а саме:

$$\left.\frac{dH}{du}\right|_{u=u^*} = Wu^* + \lambda^T(t)B = 0$$

Тоді

$$u^*(t) = -\frac{\lambda^T(t)B}{W}$$

Отже, використавши обмеження зверху та знизу на керування $u^*(t)$, ми прийшли до того, що оптимальне керування може бути виражене:

$$u^*(t) = \min\left\{1, \left(-\frac{\lambda^T(t)B}{W}\right)\right\} \tag{9}$$

Виходячи з теореми 1 оптимальне керування задачі (6), (7) може бути побудоване в результаті розв'язку такої крайової задачі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(x(t)) + \min\left\{1, \left(-\frac{\lambda^T(t)B}{W}\right)\right\}B \tag{10}$$

Чисельне обчислення оптимального керування

Методи чисельного розв'язку задач оптимального керування можна класифікувати як прямі, так і непрямі. Ці методи відрізняються підходами для пошуку розв'язку задачі оптимального керування. Непрямі методи намагаються розв'язати крайову задач необхідних умов оптимальності. Напротивагу, прямі методи не вимагають безпосередньої побудови необхідних умов. Прямі методи не будують спряжену систему, систему керування та умов трансверсальності. Вивчаючи оптимальне керування використовуються обидва підходи. Головним недоліком використання непрямих методів є те, що навіть знаючи допустимий стан та керування, немає гарантії, що обчислений розв'язок покращить відомий. Більше того, непрямий метод потребує початкових наближених значень для спряжених змінних, а чисельний розв'язок спряженої системи на практиці є слабо обумовленою задачею [3].

З цієї причини ми використали прямий метод, який дозволяє знайти чисельні розв'язки задач, що мають навіть загальніші від (1), (2) постановки.

Програмна реалізація. Прямий метод чисельного розв'язання задачі оптимального керування реалізовано в пакеті Java – класів dyn.Opt.

Розглядається задача (6) – (11) на основі опису 3-х компартментної моделі з анестезіології [4]. Опис задачі зроблено за допомогою вхідного текстового файлу, де змінні стану системи визначено командою: *state x1 x2 x3*

змінна керування: *control u*

константи: *real a11 a21 a31 a12 a13 K nu W p1 p2 p3*

кількість часових вузлів: *nodes = 356*

метод розв'язання задачі нелінійного програмування: *method = dyn_sqp*

метод інтегрування системи диференціальних рівнянь: *ode = huen*

точність методу: *epsilon = 1.0e-4*

Блок початкових умов: *initial_condition:*

x1 = 40

x2 = 0.0

x3 = 0.0

У блоці *dynamic_equation* описується система керування (6) із зазначеними параметрами:

p1=1

p2=2.514

p3=2.619
a11=1.6
a21=0.207
a31=0.09
a12=1.901
a13=1.98
K=40
nu=0.155
*ddt x1 =-(a11+a21+a31)*x1+a12*x2+a13*x3 + u*
*ddt x2 = -a12*x2+a21*x1*
*ddt x3 = -a13*x3+a31*x1*
В блоці *inequality_constraint* описуються обмеження типу нерівності:
d = -u
d = u-0.24
Критерій якості описується в блоці: *cost_functional*
W = 0.001
initial_time = 0.0
final_time = 56
*L=(p1*x1+p2*x2+p3*x3)*(p1*x1+p2*x2+p3*x3)-2*((p1*x1+p2*x2+p3*x3)*K*exp(-nu*t))+((K*K*exp(-2*nu*t)))+0.5*W*u*u*

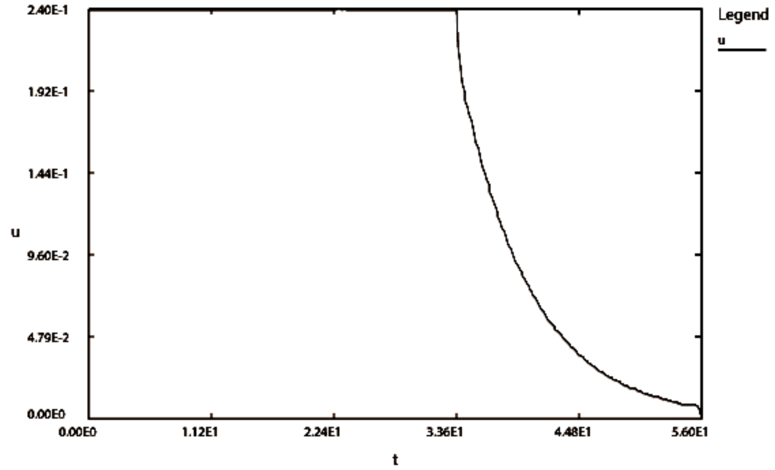


Рисунок 1 – Поведінка змінної керування дози анестатичного препарату пропофолу на заданому часовому проміжку

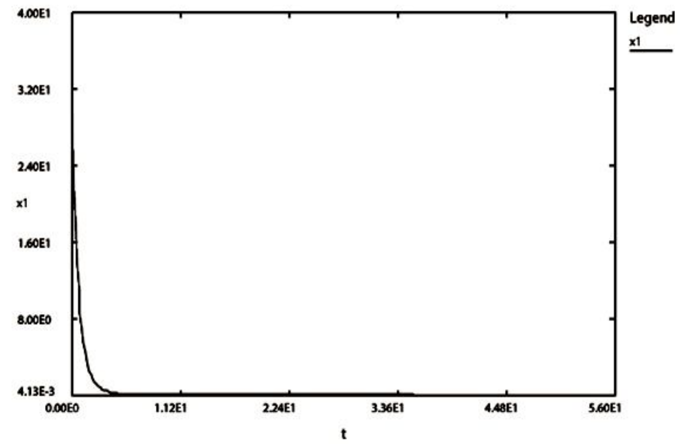


Рисунок 2

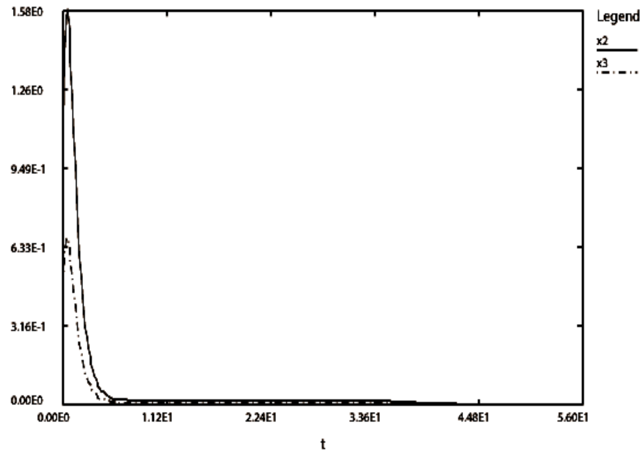


Рисунок 3

На рис. 2 і рис. 3 відповідно, представлені розв'язки задачі оптимального керування при значеннях параметрів та початкових умовах.

З рис. 1 видно, що на протязі перших 34 хв. слід вводити максимальну кількість препарату, а вже на наступному проміжку часу по експоненціальному закону сам препарат виводиться з організму.

Оскільки розв'язок лінійної системи можна отримати і в явному вигляді, дослідження оптимального керування підсилимо нелінійною задачею з врахуванням динаміки Міхаеліса – Ментена [5].

Опис задачі, так як і попередньому випадку зроблено за допомогою вхідного текстового файлу, де змінні стану системи визначено командою: *state x1 x2 x3*
змінна керування: *control u*
константи: *real a11 a21 a31 a12 a13 k1 k2 k3 K nu W p1 p2 p3*

Кількість вузлів, метод та точність розв'язання задачі залишаємо без змін. Припустимо, що початкові умови

x1 = 40
x2 = 0.0
x3 = 0.0

Нелінійна система диференціальних рівнянь з врахуванням динаміки Міхаеліса – Ментена із зазначеними параметрами, описується в наступному вигляді:

```
p1=1
p2=2.514
p3=2.619
a11=1.6
a21=0.207
a31=0.09
a12=1.901
a13=1.98
k1=2.7
k2=1
k3=0.7
K=40
nu=0.155
ddtx1=(a11+a21+a31)*x1+a12*x2/(x2+(k1+k2)/k3)+a13*x3/(x3+(k1+k2)/k3)+u
ddt x2 = -a12*x2+a21*x1/(x1+(k1+k2)/k3)
ddt x3= -a13*x3+a31*x1/(x1+(k1+k2)/k3)
```

Накладаємо обмеження у вигляді нерівностей:
d = -u
d = u-0.24
Критерій якості має вигляд:
*L=(p1*x1+p2*x2+p3*x3)*(p1*x1+p2*x2+p3*x3)-2*((p1*x1+p2*x2+p3*x3)*K*exp(-nu*t))+((K*K*exp(-2*nu*t)))+0.5*W*u*u*

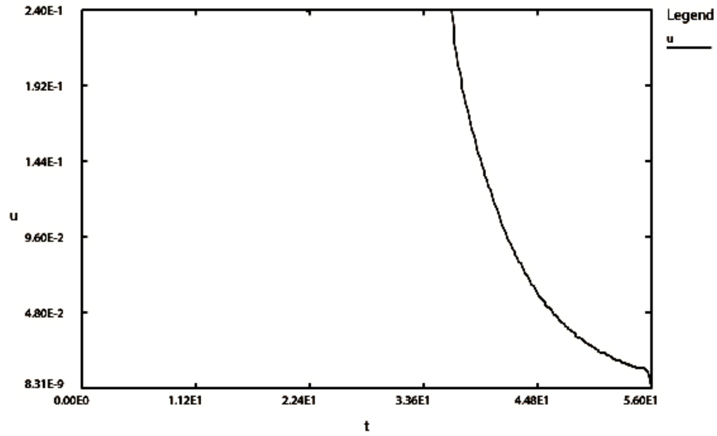


Рисунок 4 – Оптимальне керування нелінійної системи на основі динаміки Міхаеліса – Ментена

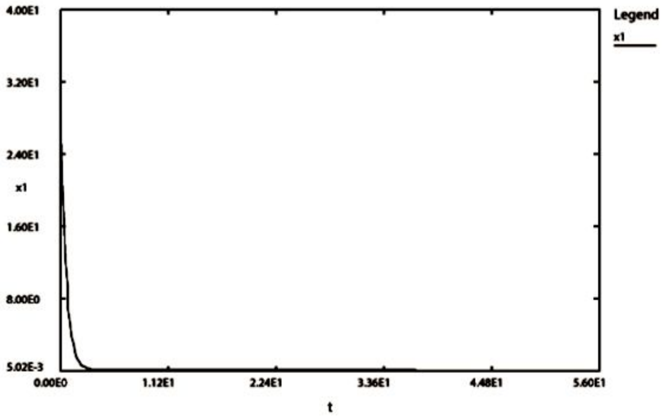


Рисунок 5

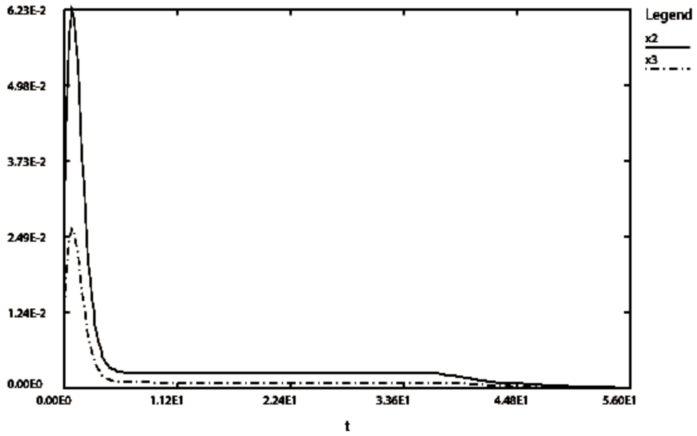


Рисунок 6

В роботі розглянута задача оптимальної експоненціальної стабілізації. На основі принципу максимуму отримано крайову задачу для побудови оптимальної траєкторії та керування.

При побудові чисельного розв'язку застосовується прямий метод, що зводиться до задачі нелінійного програмування.

В якості прикладу розглядається компартментна модель введення анестетичного препарату. При цьому порівнюється лінійна та нелінійна модель (на основі динаміки Міхаеліса – Ментена). З чисельного експерименту видно, що в обох випадках приходимо до подібного характеру оптимального керування. При цьому інтегрування нелінійної моделі показує на суттєво менші значення концентрації препарату в периферичних компартментах, що має суттєве клінічне значення.

Список літератури

1. Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров , С.В. Фомин – [3-е изд., испр. и доп.] – М. : Физматлит, 2007. – 408 с.
2. Бублик Б.Н.Основы теории управления / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко – К. : Вища школа, 1975. – 327 с.
3. Перестюк М.О. Варіаційне числення та методи оптимізаці / Перестюк М.О., Стажицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. – К : Навч.посібник, 2010. – 121 с.
4. Марценюк В.П. Построение экспоненциальной оценки в компартментной системе с распределенными запаздываниями: подход на основе неравенства Хейла – Лунела / В.П. Марценюк, І.Є. Андрущак , Н.М. Гандзюк // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 3. – С. 26-31.
5. Марценюк В.П. Побудова експоненціальної оцінки для нелінійної невід'ємної системи із запізненням на основі нерівності Хейла – Лунела / В.П. Марценюк , Н.М. Гандзюк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – № 4.

References

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal control. 3 – publ. - M: Fyzmatlyt, 2007. – 408 p.
2. Bublik B.N., Kirichenko N.F. Fundamentals of control theory. – K : High School, 1975. – 327 p.
3. Perestyuk M.O., Stazhytskyy O.M., Kapustyan O.V., Loveykin U.V. Calculus of variations and optimization techniques. – K : Tutorial, 2010. – 121p.
4. Martsenyuk V.P., Andrushchak I.Ye., Gandzyuk N.M. Constructing exponential estimates in compartmental systems with distributed delays: an approach based on the Hale–Lunel inequality // Cybernetics and Systems Analysis / 2013. / Volume 49, Issue 3 / p/ 347-352.
5. Martsenyuk V.P., Gandzyuk N.M. Construction of exponential estimates for nonlinear nonnegative system with delays based on Hale – Lunel inequality. // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics. /2013./ Issue 4.

RESUME

V.P. Martsenyuk, N.M. Gandzyuk

The Problem of Optimal Control of Compartmental Systems

The article describes the optimal control problem of compartmental system:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t) \qquad (1)$$
$$x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m$$

with initial condition: $x(0)=x_0$. Consider that $f: R^n \to R^n$ is continuous and $f(0)=0$.

Control set

$$U=\left\{u(t)=\{u_i\}_{i=1}^{m} : 0 \le u_i(t) \le 1,\ 0 \le t \le t_f,\quad u_i(t) \text{ is measurable}\right\}$$

t_f is finite time control.

The aim of the optimal control problem is exponential stabilization of system (1). Cost criterion in this case is

$$J[u]=\int_0^{t_f}\left[(p^T x(t)-Ke^{-vt})^2+\frac{1}{2}Wu^T(t)u(t)\right]dt, \qquad (2)$$

W is weighting factor.

To represent the numerical solution of optimal control we use the direct method, which is implemented in the Java-class package dyn.Opt

Application of compartmental model of anesthetic chemical is considered as an example. Linear and nonlinear models are compared (based on the dynamics of the Michaelis - Menten). In both cases the similar nature of optimal control was obtained. At the same time integrating the nonlinear model shows significantly lower values for the concentration of chemical in the peripheral compartments, which is of clinical significance.

Стаття надійшла до редакції 24.12.2013.